§ 6. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки вдоль оси Ox, согласно (11), имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x(t;\,x,\,v), \tag{11'}$$

если рассматривается случай зависимости силы только от времени, координаты и скорости.

Начальные условия можно задать в форме $t=0$, $x=x_0$, $v_x=v_0$.

Наиболее важные случаи прямолинейного движения материальной точки получаются тогда, когда сила F_x постоянна или она зависит только от времени, или от координаты x, или от скорости v. Если сила постоянна, имеем случай равнопеременного движения, т. е. движения с постоянным ускорением. От времени сила зависит обычно, когда ее изменяют путем регулирования, например регулируют силу тяги самолета изменением режима работы его двигателей.

Силу, зависящую от координаты x, могут создать сжатая или растянутая пружина и другие упругие тела при их деформации. Силы, зависящие от скорости движения,— это прежде всего силы сопротивления, когда материальная точка движется в какой-либо среде, например в воздухе, в воде и т. д.

Отметим, что в перечисленных случаях интегрирование дифференциального уравнения (11′) выполняется наиболее просто и его можно довести до конца в квадратурах. В более общем случае, если сила одновременно зависит от времени t, координаты x и скорости v, в большинстве случаев дифференциальное уравнение можно проинтегрировать лишь приближенно.

Рассмотрим примеры на составление и интегрирование дифференциального уравнения прямолинейного движения точки. Эти примеры позволяют выявить некоторые особенности решения таких задач. Ниже приведены примеры, когда сила зависит только от времени, или от скорости, или от координаты.

Пример 1. Точка массой m (рис. 8) падает вертикально вниз без начальной скорости под действием силы тяжести, испытывая силу сопротивления воздуха $\bar{R}$, значение которой пропорционально квадрату скорости и массе точки, т. е. $R=kmv^2$, где k — постоянная положительная величина.

Найти уравнение движения точки.

Решение. Направим ось Ox по вертикали вниз, выбрав за начало координат положение точки в момент начала движения. В этот же момент примем $t=0$. В произвольный момент времени прикладываем к точке действующие на нее силы $\bar{P}$ и $\bar{R}$ и составляем дифференциальное уравнение ее движения. Имеем

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-kmv^2.$$

Скорость в этом случае можно определить в зависимости от времени или от координаты, используя подстановки

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=v\frac{dv}{dx}.$$

Последняя подстановка позволяет исключить из дифференциального уравнения время при определении скорости. Эта подстановка получается из первой умножением и одновременным делением на dx:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{dv}{dx}v.$$

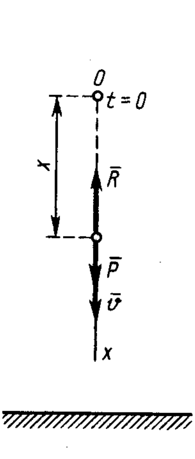

Рис. 8

Используя первую подстановку, получаем дифференциальное уравнение движения точки в следующем виде:

$$dv/dt=k(g/k-v^2).$$

Разделяя переменные и беря интегралы от обеих частей, имеем

$$\int_0^v\frac{dv}{g/k-v^2}=k\int_0^t dt.$$

Для того чтобы не искать дополнительно произвольную постоянную интегрирования, интегралы возьмем определенные, сохраняя верхний предел переменным для последующего интегрирования, а для нижних пределов используем также условие: при $t=0$ $v=0$. Выполняя интегрирование и подставляя пределы, получаем

$$\int_0^v\left[-\frac{d(\sqrt{g/k}-v)}{\sqrt{g/k}-v}+\frac{d(\sqrt{g/k}+v)}{\sqrt{g/k}+v}\right]=2\sqrt{g/k}\cdot k\int_0^t dt,$$

или

$$-\ln\frac{\sqrt{g/k}-v}{\sqrt{g/k}+v}\bigg|_0^v=2\sqrt{g/k}\,t\bigg|_0^t,$$

т. е.

$$\ln\frac{\sqrt{g/k}-v}{\sqrt{g/k}+v}-\ln 1=-2\sqrt{g/k}\,t.$$

Потенцируя и решая относительно v, имеем

$$v=\sqrt{g/k}\,\frac{1-e^{-2\sqrt{gk}\,t}}{1+e^{-2\sqrt{gk}\,t}}=\sqrt{g/k}\,\frac{e^{\sqrt{gk}\,t}-e^{-\sqrt{gk}\,t}}{e^{\sqrt{gk}\,t}+e^{-\sqrt{gk}\,t}}=\sqrt{g/k}\,\mathrm{th}(\sqrt{gk}\,t). \tag{a}$$

Переходя в (а) к пределу при t, стремящемся к бесконечности, получаем

$$v_{\text{пр}}=v_{t=\infty}=\sqrt{g/k}\lim_{t\to\infty}\frac{1-e^{-2\sqrt{gk}\,t}}{1+e^{-2\sqrt{gk}\,t}}=\sqrt{g/k}.$$

Для достижения предельной скорости требуется бесконечно большое время. Более подробные расчеты показывают, что скорость, близкая к предельной, устанавливается довольно быстро.

Отметим, что для свободного падения в воздухе парашютиста вблизи Земли без раскрытия парашюта предельная скорость равна 50...60 м/с; для авиационной бомбы она составляет 200...300 м/с.

Для нахождения закона движения точки подставляем в (а) вместо скорости v ее значение dx/dt. Тогда

$$dx/dt=\sqrt{g/k}\,\mathrm{th}(\sqrt{gk}\,t).$$

Интегрируя это уравнение после разделения переменных, имеем

$$\int_0^x dx=\sqrt{g/k}\int_0^t \mathrm{th}(\sqrt{gk}\,t)\,dt,$$

или

$$x=\sqrt{g/k}\cdot\sqrt{1/(gk)}\,\ln\mathrm{ch}(\sqrt{gk}\,t)|_0^t=(1/k)\ln\mathrm{ch}(\sqrt{gk}\,t).$$

Пример 2. Материальная точка массой m (рис. 9), брошенная вертикально вверх с поверхности Земли со скоростью v_0, движется под действием силы тяжести по закону тяготения Ньютона.

Определить зависимость скорости точки от ее расстояния до центра Земли, пренебрегая сопротивлением воздуха.

Решение. Направив ось Ox по прямолинейной траектории точки, выберем начало координат в центре Земли. Тогда по закону Ньютона для силы тяготения имеем

$$F=k/x^2.$$

Постоянный коэффициент k можно выразить через другие величины, в частности $k=GMm$, где M — масса Земли; G — универсальная постоянная тяготения. Для рассматриваемого случая удобнее k выразить из условия, что на поверхности Земли сила тяготения F равна силе тяжести $P=mg$. Приравнивая F и P при $x=R$, получим

$$mg=k/R^2;\qquad k=mgR^2,$$

где g — ускорение силы тяжести у поверхности Земли; R — радиус Земли. Подставляя полученное значение k в выражение для силы тяготения, имеем

$$F=mgR^2/x^2.$$

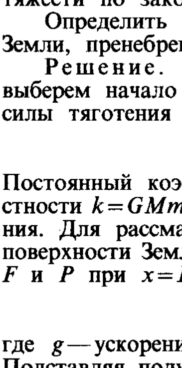

Рис. 9

Составляем дифференциальное уравнение движения точки. Получаем

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x;\qquad m\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{mgR^2}{x^2}.$$

Знак минус в правой части этого уравнения определяется знаком проекции силы $\bar{F}$ на ось Ox. Проекция силы отрицательна для положительных значений x, рассматриваемых в этом примере.

Исключая время из дифференциального уравнения подстановкой

$$\frac{d^2x}{dt^2}=v\frac{dv}{dx},$$

получаем

$$v\frac{dv}{dx}=-\frac{gR^2}{x^2}.$$

Разделяя переменные и беря от обеих частей интегралы с учетом, что при $x=R$ $v=v_0$, имеем

$$\int_{v_0}^v v\,dv=-gR^2\int_R^x\frac{dx}{x^2},$$

или

$$\frac{v^2}{2}-\frac{v_0^2}{2}=-gR\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{R}\right).$$

Отсюда находим

$$v=\sqrt{v_0^2+2gR^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R}\right)}.$$

Для определения наибольшего расстояния $x_{\max}$ в зависимости от скорости v_0 следует положить $v=0$. Из последней формулы получим

$$x_{\max}=2gR^2/(2gR-v_0^2).$$

Видно, что $x_{\max}$ увеличивается с ростом скорости v_0 и при $v_0^*=\sqrt{2gR}$ расстояние $x_{\max}$ становится равным бесконечности. Это можно истолковать так, что точка, брошенная с Земли со скоростью $v_0^*=\sqrt{2gR}$, не возвратится на Землю. Приняв $g\approx 9{,}8$ м/с^2, $R=6{,}4\cdot 10^6$ м, получим

$$v_0^*=\sqrt{2gR}\approx 11{,}2\ \text{км/с}.$$

Скорость v_0^* называют *второй космической скоростью*. Это наименьшая скорость, которую должен иметь космический корабль для полета к другим планетам Солнечной системы.

Наименьшую скорость космического корабля, при которой он становится спутником Земли, называют *первой космической скоростью*. Она приблизительно равна 8 км/с (см. ниже § 2 гл. 10).

Пример 3. Материальная точка массой m (рис. 10) движется под действием силы притяжения F к неподвижной точке O. Эта сила пропорциональна массе точки и обратно пропорциональна кубу расстояния между точками. Коэффициент пропорциональности равен единице. В начальный момент $t=0$ начальное расстояние точки $x_0=2$ м и начальная скорость $v_0=0{,}5$ м/с.

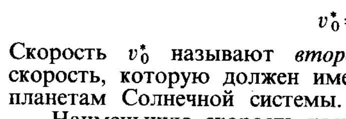

Рис. 10

Определить уравнение движения точки.

Решение. Выбирая за начало координат точку O для силы F при положительном x, имеем

$$F=m/x^3.$$

Учитывая направление силы $\bar{F}$, составляем дифференциальное уравнение движения точки:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x;\qquad F_x=-m/x^3.$$

После преобразования левой части оно примет форму

$$v\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{x^3}.$$

Разделяя переменные и интегрируя это уравнение, имеем

$$\int_{v_0}^v v\,dv=-\int_{x_0}^x\frac{dx}{x^3},$$

или

$$\frac{v^2}{2}-\frac{v_0^2}{2}=\frac{1}{2x^3}-\frac{1}{2x_0^3}.$$

После подстановки числовых значений для x_0 и v_0 получаем:

$$v=1/x;\quad v=dx/dt;\quad dx/dt=1/x.$$

Интегрируя полученное уравнение, имеем

$$\int_{x_0}^x x\,dx=\int_0^t dt;\qquad \frac{x^2}{2}-2=t.$$

Закон движения точки можно выразить в форме

$$x=\sqrt{4+2t}.$$